Über die Teiler der in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahlen*

Leonhard Euler

§1 Hier nehmen wir immer an, dass die zwei Zahlen x und y zueinander prim sind, und es ist bekannt, dass in einer solchen Form enthaltene Zahlen niemals durch alle Primzahlen geteilt werden können, sondern immer für jede beliebige Zahl gewisse Primzahlen ausgeschlossen werden, deren Menge quasi die Hälfte gänzlich aller Primzahlen ist. So ist bewiesen worden, dass die in dieser Form $xx + yy$ enthaltenen Zahlen nur durch die Primzahlen geteilt werden können, die von der Form $4N + 1$ sind, und daher alle Primzahlen der Form $4N - 1$ völlig ausgeschlossen sind.

§2 Auf dieselbe Weise ist bewiesen worden, dass in dieser Form $2xx + yy$ enthaltene Zahlen nur Primteiler zulassen, die in einer dieser Formen $8N + 1$ oder $8N + 3$ enthalten sind, sodass die übrigen Primzahlen in den Formen $8N + 5$ und $8N + 7$ enthalten sind. In gleicher Weise sind alle Primteiler von Zahlen der Form $3xx + yy$ entweder von der Form $12N + 1$ oder $12N + 7$; die übrigen hingegen, die entweder von der Form $12N + 5$ oder $12N + 11$ sind, können niemals Teiler sein; daher ist klar, dass alle Teiler in der Form $6N + 1$ erfasst sind, die in der Form $6N + 5$ hingegen ausgeschlossen werden.

*Originaltitel: "De divisoribus numerorum in forma $mxx + nyy$ contentorum", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 5* (1815, geschrieben 1778): pp. 3 – 23, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 4, pp. 418 – 431, Eneström Nummer E744, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§3 In nicht unähnlicher Weise verhält sich die Angelegenheit für die allgemeine Form $mxx + nyy$, all deren Primteiler in gewissen Formeln von dieser Art enthalten sind: $4mnN + \alpha$, $4mnN + \beta$, $4mnN + \gamma$ etc., wo α, β, γ etc. gewisse in jedwedem Fall leicht zu bestimmende Zahlen sind, aber die ausgeschlossenen Zahlen sind in ebenso vielen anderen Formeln $4mnN - \alpha$, $4mnN - \beta$, $4mnN - \gamma$ etc. enthalten, was auf die folgende Weise gefällig ausgedrückt werden kann, dass für die allgemeine Form $mxx + nyy$ die Form der Teiler $4mnN + \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc., aber die Form der ausgeschlossenen Zahlen $4mnN - \alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -\varepsilon$ etc. gesetzt wird.

§4 Hier ist für jeden beliebigen Fall der Zahlen m und n ersichtlich, dass die Zahlen α, β, γ, δ etc. zur Zahl $4mn$ prim sein müssen, weil andernfalls keine Primzahlen hervorgehen könnten. Weiter lässt sich auch leicht einsehen, dass unter den Zahlen α, β, γ etc. immer die Einheit enthalten ist und auch alle zu $4mn$ primen Quadratzahlen. Außerdem treten in der Reihe dieser Zahlen α, β, γ, δ etc. immer auch alle Potenzen der einzelnen auf, dann aber auch alle Produkte aus zwei oder drei, wie beispielsweise $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, sofern sie natürlich die Zahl $4mn$ nicht übersteigen. Schließlich wird es auch förderlich sein, bemerkt zu haben, dass in jedwedem Fall dieses Zahlen α, β, γ, δ etc. nur vom Produkt mn abhängen, sodass diese zwei allgemeinen Formen $mxx + nyy$ und $m'xx + n'yy$ dieselben Formen der Teiler haben, wenn nur $m'n' = mn$ war.

§5 Ich glaube, dass es nicht unpassend sein, wird die folgende Tabelle hinzugefügt zu haben, welche für die einfacheren Zahlen mn die Formen der Primteiler zeigt:

Wert des Prod. mn	Form der Teiler
1	$4N+1$,
2	$8N+1$, 3,
3	$12N+1$, 7,
5	$20N+1$, 3, 7, 9
6	$24N+1$, 5, 7, 11
7	$28N+1$, 9, 11, 15, 23, 25
10	$40N+1$, 7, 9, 11, 13, 19, 23, 37
11	$44N+1$, 3, 5, 9, 15, 23, 25, 27, 31, 37
13	$52N+1$, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 25, 29, 31, 47, 49
14	$56N+1$, 3, 5, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 39, 45
15	$60N+1$, 17, 19, 23, 31, 47, 49, 53

§6 In diesen Formeln werden natürlich alle Zahlen, die Teiler einer beliebigen in der Form $mxx+nyy$ enthaltenen Zahl sein können, nach entsprechender Teilung durch $4mn$, unter die Grenze $4mn$ herabgesenkt. Wenn wir aber negative Werte zulassen wollen, dann werden all diese Zahlen sogar unter $2mn$ gebracht werden können; und auf diese Weise werden gänzlich alle zu $4mn$ primen Zahlen, die auch kleiner sind als $2mn$, auftauchen, entweder mit dem Vorzeichen $+$ oder dem Vorzeichen $-$ behaftet; und weil ja die Komplemente dieser Zahlen zu $4mn$ die ausgeschlossenen Zahlen liefern, ist es nur nötig, in jenen Form die Zeichen zu vertauschen, damit man die ausgeschlossenen Zahlen erhält, die niemals Teiler einer gewissen zahl der Form $mxx+nyy$ sein können.

§7 Wenn wir also die Teiler dieser Form $mxx+nyy$ auf diese Weise anordnen, dass gänzlich alle zu $2mn$ primen Zahlen, die gleichzeitig auch kleiner als selbige sind, auftreten, werden in ihnen außerordentliche Eigenschaften entdeckt werden, wenn wir jeder dieser Zahlen ihr Komplement zu $2mn$ unter ihr hinzuschreiben; und auf diese Weise wird die obige Struktur bis hin zu mn fortgeführt werden, während die größeren von mn bis hin zu $2mn$ unter selbige geschrieben werden. Für verschiedene Beschaffenheit der Zahl mn wird aber klar werden, dass zwei untereinander geschriebene Komplemente entweder dieselben oder verschiedene Vorzeichen haben werden; der gleichen Vorzeichen werden sie sich natürlich in den Fällen erfreuen, in denen entweder

$mn = 4i + 1$ oder $mn = 4i + 2$ ist, aber in den übrigen zwei Fällen, in denen entweder $mn = 4i + 3$ oder $mn = 4i + 4$ ist, werden jene zwei Komplemente mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sein.

§8 Auf diese Weise wollen wir also die Formen für die Teiler der in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahlen darstellen und daher weiter fortsetzen:

mn	Form der Teiler
1	$4N + 1$
2	$8N + 1$ $+ 3$
3	$12N + 1$ $- 5$
4	$16N + 1, - 3$ $- 7, + 5$
5	$20N + 1, + 3$ $+ 9, + 7$
6	$24N + 1, + 5$ $+ 11, + 7$
7	$28N + 1, - 3, - 5$ $- 13, + 11, + 9$
8	$32N + 1, + 3, - 5, - 7$ $- 15, - 13, + 11, + 9$
9	$36N + 1, + 5, - 7$ $+ 17, + 13, - 11$
10	$40N + 1, - 3, + 7, + 9$ $+ 19, - 17, + 13, + 11$
11	$44N + 1, + 3, + 5, - 7, + 9$ $- 21, - 19, - 17, + 15, - 13$
12	$48N + 1, - 5, + 7, - 11$ $- 23, + 19, - 17, + 13$
13	$52N + 1, - 3, - 5, + 7, + 9, + 11$ $+ 25, - 23, - 21, + 19, + 17, + 15$

mn	Form der Teiler
14	$56N + 1, + 3, + 5, + 9, - 11, + 13$ $+ 27, + 25, + 23, + 19, - 17, + 15$
15	$60N + 1, - 7, - 11, - 13$ $- 29, + 23, + 19, + 17$
16	$64N + 1, - 3, + 5, - 7, + 9, - 11, + 13, - 15$ $- 31, + 29, - 27, + 25, - 23, + 21, - 19, + 17$
17	$68N + 1, + 3, - 5, + 7, + 9, + 11, + 13, - 15$ $+ 33, + 31, - 29, + 27, + 23, + 21, + 21, - 19$
18	$72N + 1, - 5, - 7, + 11, - 13, + 17$ $+ 35, - 31, - 29, + 25, - 23, + 19$
19	$76N + 1, - 3, + 5, + 7, + 9, + 11, - 13, - 15, + 17$ $- 37, + 35, - 33, - 31, - 29, - 27, + 25, + 23, - 21$
20	$80N + 1, + 3, + 7, + 9, - 11, - 13, - 17, - 19$ $- 39, - 37, - 33, - 31, + 29, + 27, + 23, + 21$
21	$84N + 1, + 5, + 11, - 13, + 17, + 19$ $+ 41, + 37, + 31, - 29, + 25, + 23$
22	$88N + 1, - 3, - 5, - 7, + 9, + 13, + 15, - 17, + 19, + 21$ $+ 43, - 41, - 39, - 37, + 35, + 31, + 29, - 27, + 25, + 23$
23	$92N + 1, + 3, - 5, - 7, + 9, - 11, + 13, - 15, - 17, - 21$ $- 45, - 43, + 41, + 39, - 37, + 35, - 33, + 31, + 29, + 25$
24	$96N + 1, + 5, + 7, + 11, - 13, - 17, - 19, - 23$ $- 47, - 43, - 41, - 37, + 35, + 31, + 29, + 25$
25	$100N + 1, - 3, - 7, + 9, - 11, + 13, + 17, - 19, + 21, - 23$ $+ 47, - 45, - 43, + 41, - 39, + 37, + 33, - 31, + 29, - 27$

§9 Wenn wir diese Beispiele richtig betrachten, werden wir außerordentliche Lehrsätze aus ihnen ableiten können, welche umso mehr die volle Aufmerksamkeit verdienen werden, weil die Prinzipien, aus welchen der Beweis zu entnehmen scheint, zumeist noch völlig unbekannt sind, sodass diese Betrachtung ein sehr weiteres Feld für uns eröffnet, die Natur der Zahlen umfassender zu erforschen.

THEOREM 1

§10 *Wenn, während p irgendeine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, $4mna + p$ ein Teiler einer gewissen in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahl war, dann werden alle in der Formel $4mnz + p$ enthaltenen Zahlen gewiss Teiler unserer vorgelegten Form sein; dahingegen werden gänzlich alle Zahlen dieser Form $4mnz - p$ aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden.*

THEOREM 2

§11 *Wenn, während p eine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, $4mna + p$ eine Primzahl war und zusätzlich kein Teiler einer in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahl, dann werden gänzlich alle in der Form $4mnz + p$ enthaltenen Zahlen, ob prim oder zusammengesetzt, aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden; dahingegen werden alle Primzahlen der Form $4mnz - p$ gewiss Teiler einer gewissen in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahl sein.*

THEOREM 3

§12 *Wenn, während p eine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, die Zahl $2mna - p$ ein Teiler der vorgelegten Form $mxx + nyy$ war, dann werden alle in der Form $4mnz - p$ enthaltenen Primzahlen gewiss Teiler der vorgelegten Form sein; dahingegen werden gänzlich alle in der Form $4mnz + p$ enthaltenen Zahlen aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden.*

THEOREM 4

§13 *Wenn, während p eine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, $4mna - p$ eine Primzahl und kein Teiler einer in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahl war, dann werden gänzlich alle in der Form $4mnz - p$ enthaltenen Zahlen, ob sie prim oder zusammengesetzt sind, aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden; dahingegen werden alle Primzahlen der Form $4mnz + p$ gewiss Teiler einer gewissen in der Form $mxx + nyy$ enthaltenen Zahl sein.*

THEOREM 5

§14 *Wenn mn eine Zahl der Form $4i+1$ oder $4i+2$ und $4mna+p$ ein Teiler der Form $mxx+nyy$ war, sodass alle in dieser Form $4mnz+p$ enthaltenen Primzahlen Teiler der vorgelegten Form sind, dann werden alle in dieser Form $4mnz+2mn-p$ enthaltenen Primzahlen auch Teiler der vorgelegten Form sein; dahingegen werden alle Zahlen der Form $4mnz-2mn+p$ oder auch $4mnz+2mn+p$ aus der Klassen der Teiler ausgeschlossen werden.*

THEOREM 6

§15 *Wenn mn eine Zahl der Form $4i+1$ oder $4i+2$ und $4mna-p$ ein Teiler der Form $mxx+nyy$ war, sodass alle in dieser Form $4mnz-p$ enthaltenen Primzahlen Teiler der vorgelegten Form sind, dann werden alle in dieser Formel $4mnz-2mn+p$ enthaltenen Primzahlen auch Teiler der vorgelegten Form sein; dahingegen werden alle Zahlen der Form $4mnz-2mn-p$ oder auch $4mnz+2mn-p$ aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden.*

THEOREM 7

§16 *Wenn mn eine Zahl der Form $4i$ oder $4i-1$ und $4mna+p$ ein Teiler der Form $mxx+nyy$ war, sodass alle in dieser Form $4mnz+p$ enthaltenen Primzahlen Teiler der vorgelegten Form sind, dann werden alle in dieser Form $4mnz-2mn+p$ enthaltenen Primzahlen auch Teiler der vorgelegten Form sein; dahingegen werden aber alle Zahlen der Form $4mnz-2mn-p$ aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden.*

THEOREM 8

§17 *Wenn mn eine Zahl der Form $4i$ oder $4i-1$ und $4mna-p$ ein Teiler der Form $mxx+nyy$ war, sodass alle in dieser Form $4mnz-p$ enthaltenen Primzahlen Teiler der vorgelegten Form sind, dann werden alle in dieser Form $4mnz+2mn-p$ enthaltenen Primzahlen auch Teiler der vorgelegten Form sein; dahingegen werden alle Zahlen der Form $4mnz-2mn-p$ aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen werden.*

KOROLLAR

§18 Während also p irgendeine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, werden alle entweder in der Form $4mnz + p$ oder in der Form $4mnz - p$ enthaltenen Primzahlen gewiss entweder Teiler der vorgelegten Form sein oder gänzlich aus der Klasse Teiler ausgeschlossen werden.

THEOREM 9

§19 *Wenn in der allgemeinen Formel für die Teiler der vorgelegten Form, wie wir sie oben dargeboten haben, die entweder positiven oder negativen Anteile f und g auftreten, dann wird ebendort auch deren Produkt fg auftreten und daher im Allgemeinen nicht nur beliebige Potenzen f^μ und g^ν derer, sondern auch alle Produkte aus zweien $f^\mu g^\nu$, wenn den Vorzeichen entsprechend Rechnung getragen worden ist, nachdem diese Zahlen natürlich, durch Teilung durch $4mn$, unter die Grenze $2mn$ gesenkt worden sind.*

KOROLLAR

§20 Daher ist klar, wenn p irgendeine zu $2mn$ teilerfremde Zahl bezeichnet, dass dann immer alle in der Form $4mnz + pp$ enthaltenen Primzahlen Teiler der vorgelegten Form sein werden; dahingegen werden alle in der Form $4mnz - pp$ enthaltenen Zahlen aus der Klasse der Teiler ausgeschlossen.

ANMERKUNG

§21 Über die allgemeine Formel, die wir hier für die Teiler der vorgelegten Form dargeboten haben, ist sorgfältig zu bemerken, dass nicht für alle in der Formel enthaltene Zahlen bestätigt werden kann, dass sie Teiler sind, sondern dass sie nur für Primzahlen gilt, weil ja Fälle auftreten können, in welchen die in dieser Form enthaltenen zusammengesetzten Zahlen aus aus der Klasse der Teiler ausgeschlossenen Faktoren bestehen; dahingegen werden gänzlich alle Zahlen in der für die ausgeschlossen angegebenen Formel, ob sie prim oder zusammengesetzt sind, immer ausgeschlossen. Überdies wird sich nun eine um vieles sichere Methode angeben lassen, die Formen für die Teiler aller zusammengesetzten Formeln leicht zu bilden, was wir im folgenden Problem zeigen werden.

PROBLEM

Nach Vorlage einer beliebigen Form $mxx + nyy$ von Zahlen eine allgemeine Formel ausfindig zu machen, die die Teiler aller in ihr enthaltenen Zahlen erfasst.

LÖSUNG

§22 Hier ist vor allem festzuhalten, dass für die Buchstaben x und y immer zueinander teilerfremde Zahlen angenommen werden müssen, weil andernfalls gänzlich alle Zahlen Teiler sein könnten. Weiter ist auch sofort klar, dass unter den Teilern selbst immer die Zahlen m und n selbst sowie deren Faktoren auftreten können, woher unser Problem nur auf die Teiler, die zu den Zahlen m und n prim sind, beschränkt wird, und damit auch die Zwei ausgeschlossen wrd, werden die Teiler gesucht werden müssen, die zu $2mn$ prim sind.

§23 Oben haben wir gelehrt, der grundlegenden Form $4mnN$ alle zu $2mn$ primen Zahlen hinzuzufügen, die zugleich kleiner als mn sind, aus welchen Zahlen die obere Reihe bestand, und hier war diese ganze Aufgabe darauf zurückgeführt worden, dass jeder beliebigen dieser Zahlen das entsprechende Vorzeichen vorangestellt wird; hier ist freilich von selbst klar, das der ersten dieser Zahlen, natürlich der Einheit, immer das Zeichen $+$ zuzuteilen ist, und weil die Vorzeichen der zusammengesetzten Zahlen der Natur der Multiplikation folgen, wird es ausreichen, diese Untersuchung nur auf Primzahlen bezogen zu haben.

§24 Es sei also p eine beliebige Primzahl, kleiner als mn, und zugleich von m und n verschieden, und dieser Zahl wird das Vorzeichen $+$ voranzustellen sein. Wannimmer eine durch p teilbare Primzahl $mxx + nyy$ gegeben sein wird, wird auch eine solche gleichermaßen durch p teilbare Zahl $mn + yy$ angegeben werden können, und sogar so, dass y kleiner ist als $\frac{1}{2}p$. Weil daher also $p < mn$ ist, wird nichts anderes verlangt, als dass dem Buchstaben y der Reihe nach alle Werte von 1 bis hin zu $\frac{1}{2}mn$ zugeteilt werden und alle Primteiler der resultierenden Zahlen, die kleiner sind als mn und von m und n verschieden sind, notiert werden, weil diesen ja das Vorzeichen $+$ voranzustellen sein wird.

§25 Nachdem diese Zahlen also notiert worden sind, wird allen übrigen Zahlen bis hin zu mn das andere Vorzeichen $-$ gegeben werden müssen, wonach den in derselben oberen Reihe auftretenden zusammengesetzten Zahlen ihre entsprechenden Vorzeichen aus der Natur der Multiplikation heraus vorangestellt werden.

§26 Nachdem aber auf diese Weise die obere Reihe der Zahlen abgehandelt worden ist, sind für die untere Reihe, welche die Komplemente der oberen Zahlen zu $2mn$ enthält, entweder dieselben oder verschiedene Zeichen voranzustellen; das erste natürlich, wannimmer die Zahl mn eine Zahl der Form $4i+1$ oder $4i+2$ war, das zweite hingegen, wenn ihre Form $4i$ oder $4i-1$ war, und auf diese Weise wird die ganze Formel für die Teiler vollständig sein.

Beispiel 1

§27 Man nehme $mn = 24$, weil welche Zahl von der Form $4i$ ist, sind der unteren Reihe die entgegengesetzten Vorzeichen zu geben. Nun sind die zu $2mn$ primen Zahlen, die kleiner sind als 24, hier 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, welche alle sogar prim sind, woher man in der Formel $24 + yy$ dem Buchstaben y der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 etc. bis hin zu 12 zuteile, und so wird eine Progression von gemäß der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. wachsenden Zahlen entspringen, von welchen einzelnen man die Primteiler kleiner als 24, ausgenommen 3, notiere, was auf die bequemste Weise folgendermaßen geschehen wird:

24		Teiler	60		Teiler
1	25	5	13	73	$--$
3	28	7	15	88	11
5	33	11	17	105	7
7	40	5	19	124	$--$
9	49	7	21	145	$--$
11	60	5	23	168	7

Daher ist also klar, dass allein die Primzahlen 1, 5, 7, 11 mit dem Vorzeichen $+$ zu versehen sind, die übrigen hingegen mit dem Vorzeichen $-$; daher, indem man die Reihe der Komplemente darunter schreibt, wird die Formel für die Teiler sein:

$$\begin{array}{l} 96N + \ \ 1, + \ \ 5, + \ \ 7, + 11, - 13, - 17, - 19, - 23 \\ \qquad - 47, - 43, - 41, - 37, + 35, + 31, + 29, + 25 \end{array}$$

Beispiel 2

§28 Es sei $mn = 26$, weil welche Zahl von der Form $4i + 2$ ist, muss die unsere Reihe dieselben Vorzeichen haben wie die obere. Nun wird uns die Formel $26 + yy$, indem wir dem Buchstaben y die Werte 1,2, 3 bis hin zu 13 zuteilen, die Primteiler kleiner als 26 liefern, 13 ausgenommen, wie die folgende Rechnung zeigt:

24		Teiler	
1	27	3	
3	30	3	5
5	35	5	7
7	42	3	7
9	51	3	17
11	62	—	
13	75	5	3
15	90	3	5
17	107	—	
19	126	3	7
21	147	3	7
23	170	5	17
25	195	3	5

Die Primzahlen, die hier das Zeichen + erhalten, sind 1, 3, 5, 7, 17; den übrigen 11, 19, 23 ist hingegen das Zeichen − voranzustellen; den zusammengesetzten Zahlen gebe man aber die aus der Natur der Multiplikation entspringenden Vorzeichen, woher die Formel für die Teiler auf die folgende Weise gebildet werden wird:

$$\begin{array}{l} 104N + \ \ 1, + \ \ 3, + \ \ 5, + \ \ 7, + \ \ 9, - 11, + 15, + 17, - 19, + 21, - 23, + 25 \\ \qquad + 51, + 49, + 47, + 45, + 43, - 41, + 37, + 35, - 33, + 31, - 29, + 27 \end{array}$$

BEISPIEL 4

§29 Man nehme $mn = 27$, und weil diese Zahl von der Form $4i - 1$ ist, müssen die unten zu schreibenden Komplemente mit den entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden. Wenn wir also nun die Formel $27 + yy$ entwickeln, werden die mit dem Zeichen $+$ zu versehenden Primteiler kleiner als 27, 3 ausgenommen, als 1, 7, 13, 19 gefunden werden, woher die übrigen Primzahlen, die das Zeichen $-$ haben werden, 5, 11, 17, 23 sein werden; deswegen wird die allgemeine Formel für die Teiler sein:

$$\begin{array}{l} 108N + \ \ 1, - \ \ 5, + \ \ 7, - 11, + 13, - 17, + 19, - 23, + 25 \\ \qquad\quad - 53, + 49, - 47, + 43, - 41, + 37, - 35, + 31, - 29 \end{array}$$

BEISPIEL 4

§30 Man nehme $mn = 28$, und weil diese Zahl von der Form $4i$ ist, müssen die darunter zu schreibenden Komplemente mit den entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden. Wenn wir nun die Formel $28 + yy$ entwickeln, werden die Primteiler kleiner als 28, 7 ausgenommen, welche mit $+$ zu versehen sind, 1, 11, 23 sein, die übrigen mit dem Zeichen $-$ zu behaftenden werden hingegen 3, 5, 13, 17, 19 sein; daher wird die allgemeine Formel für die Teiler sein:

$$\begin{array}{l} 112N + \ \ 1, - \ \ 3, - \ \ 5, + \ \ 9, + 11, - 13, + 15, - 17, - 19, + 23, + 25, - 27 \\ \qquad\quad - 55, + 53, + 51, - 47, - 45, + 43, - 41, + 39, + 37, - 33, - 31, + 29 \end{array}$$

BEISPIEL 5

§31 Man nehme $mn = 30$, und weil diese Zahl von der Form $4i + 2$ ist, werden die unten zu schreibenden Zahlen mit denselben Vorzeichen versehen werden müssen wie die oberen. Nun sind die mit dem Vorzeichen $+$ zu versehenden zu $2mn$ primen Zahlen, die kleiner als 30 sind, 1, 11, 13, 17, 23, 29, die übrigen mit dem Vorzeichen $-$ behafteten Primzahlen sind hingegen 7, 19; daher wird die allgemeine Formel für die Teiler sein:

$$\begin{array}{l} 120N + \ \ 1, - \ \ 7, + 11, + 13, + 17, - 19, + 23, + 29 \\ \qquad\quad + 59, - 53, + 49, + 47, + 43, - 41, + 37, + 31 \end{array}$$

Beispiel 6

§32 Wir wollen $mn = 50$ nehmen, und weil diese Zahl von der Form $4i + 2$ ist, werden die unten zu schreibenden Komplemente mit denselben Vorzeichen versehen werden müssen. Nun liefert die Formel $50 + yy$ die folgenden Primteiler kleiner als 50, 5 ausgenommen, welche mit dem Vorzeichen $+$ zu versehen sind, 1, 3, 11, 17, 19, 41, 43; die übrigen mit dem Vorzeichen $-$ zu versehenden Primzahlen sind hingegen 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, woher die allgemeine Formel für die Teiler sein wird:

$$\begin{array}{l} 200N + 1, + 3, - 7, + 9, + 11, - 13, + 17, + 19, - 21, - 23 \\ \qquad\quad + 99, + 97, - 93, + 91, + 89, - 87, + 83, + 81, - 79, - 77 \\ \\ \qquad\quad + 27, - 29, - 31, + 33, - 37, - 39, + 41, + 43, - 47, + 49 \\ \qquad\quad + 73, - 71, - 69, + 67, - 63, - 61, + 59, + 57, - 53, + 51 \end{array}$$

Beispiel 7

§33 Wir wollen schließlich $mn = 60$ nehmen, und weil diese Zahl von der Form $4i$ ist, werden die unten zu schreibenden Komplemente mit den entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden müssen. Wenn wir also nun die Formel $60 + yy$ entwickeln, werden die mit dem Vorzeichen $+$ zu versehenden Primteiler kleiner als 60, ausgenommen 3 und 5, als 1, 17, 19, 23, 31, 47, 53 gefunden werden; daher werden die übrigen Primzahlen, die das Vorzeichen $-$ haben müssen, 7, 11, 13, 29, 37, 41, 43, 59 sein; daher wird die allgemeine Form für die Teiler sein:

$$\begin{array}{l} 240N + 1, - 7, - 11, - 13, + 17, + 19, + 23, - 29, + 31 \\ \qquad\quad - 119, + 113, + 109, + 107, - 103, - 101, - 97, + 91, - 89 \\ \\ \qquad\quad - 37, - 41, - 43, + 47, + 49, + 53, - 59 \\ \qquad\quad + 83, + 79, + 77, - 73, - 71, - 67, + 61 \end{array}$$

ADDITAMENTUM

zur Dissertation über die Teiler der in der Form
$mxx + nyy$ enthaltenen Zahlen

Es wird nicht unpassend sein, hier eine einzigartige Beobachtung über die letzten Teile jeder Formel von Teilern beizufügen, welche sich natürlich im Allgemeinen angeben lassen, wenn nur sechs Fälle voneinander unterschieden werden.

BEMERKUNG 1

Wenn $mn = 4i$ war, dann wird in der für die Teiler gegebenen Formel in der oberen Reihe der letzte Term immer $-(4i-1)$ sein, und sein Komplement zu $8i$, welches darunter zu schreiben ist, wird $+(4i+1)$ sein, weil es ja das entgegengesetzte Vorzeichen haben muss. Weil nämlich $mn = 4i$ ist, wird $mn + 1 = 4i + 1$ sein, welche Zahl, weil sie prim zu mn ist, gewiss das Zeichen $+$ haben muss, und daher ihr Komplement, welches darüber zu schreiben, das entgegengesetzte Vorzeichen $-$.

BEMERKUNG 2

Wenn $mn = 4i + 2$ war, in welchem Fall sich die Komplemente derselben Vorzeichen erfreuen, wird $mn + 1 = 4i + 3$ sein, weil welche Zahl prim zu mn ist, muss sie das Vorzeichen $+$ haben, also wird ihr Komplement, welches darüber zu schreiben ist, gleichermaßen das Vorzeichen $+$ haben.

BEMERKUNG 3

Wenn $mn = 8i + 1$ war, in welchem Fall sich die zwei Komplemente der gleichen Vorzeichen erfreuen, wird in der oberen Reihe der letzte Term $8i - 1$ sein, und sein Komplement $= 8i + 3$, welchen beiden das Vorzeichen $-$ vorangestellt werden muss, und so werden in diesem Fall die letzten Terme sein:

$$\begin{aligned} &-(8i-1)\\ &-(8i+3). \end{aligned}$$

Ja, in diesem Fall lassen sich sogar die vorletzten Terme angeben. Weil nämlich $mn + 4 = 8i + 5$ ist, wird dieser Zahl das Vorzeichen $+$, und daher auch ihrem

Komplement $8i - 3$ dasselbe Vorzeichen voranzustellen sein; daher ist klar, dass in diesen Fällen, in denen $mn = 8i + 1$ ist, die beiden letzten Terme sind:

$$\begin{array}{ll} +\ (8i - 3) & -\ (8i - 1) \\ +\ (8i + 5) & -\ (8i + 3). \end{array}$$

Beobachtung 4

Wenn $mn = 8i + 3$ war, dann wird der letzte Term in der oberen Reihe $8i + 1$ sein, und sein mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu notierendes Komplement $8i + 5$. Weil aber die obere Zahl ein Quadrat sein kann, muss sie das Vorzeichen $+$ haben, und daher ihr Komplement das Vorzeichen $-$; die vorletzten Zahlen hingegen werden $8i - 1$, $8i + 7$ sein, von welchen die untere, weil $mn + 4 = 8i + 7$ ist, das Vorzeichen $+$ erhält, und daher die obere das entgegengesetzte $-$; daher werden für die Fälle, in denen $mn = 8i + 3$ ist, die beiden letzten Terme sein:

$$\begin{array}{ll} -\ (8i - 1) & +\ (8i + 1) \\ +\ (8i + 7) & -\ (8i + 5). \end{array}$$

Bemerkung 5

Wenn $mn = 8i + 5$ war, werden die letzten Formen der Teiler $8i + 3$, $8i + 7$ und mit denselben Vorzeichen behaftet sein, welches entdeckt wird $+$ zu sein; aber die vorletzten Terme werden $8i + 1$, $8i + 9$ sein, von welcher der untere, weil er $= mn + 4$ ist, das Vorzeichen $+$ haben wird, und daher auch der oben geschriebene. Als logische Konsequenz werden in den Fällen, in denen $8i + 5$ ist, in der Formel der Teiler die beiden letzten Terme sein:

$$\begin{array}{ll} +\ (8i + 1) & +\ (8i + 3) \\ +\ (8i + 9) & +\ (8i + 7). \end{array}$$

Bemerkung 6

Wenn $mn = 8i + 7$ war, sind in der Formel der Teiler die letzten Terme $8i + 5$ und $8i + 9$, von welchen der untere gewiss das Vorzeichen $+$ haben muss, weil er Quadrate umfassen kann, der obere hingegen das Vorzeichen $-$; aber die vorletzten Terme sind $8i + 3$ und $8i + 11$, von welchen der untere, natürlich $= mn + 4$, gewiss das Vorzeichen $+$ hat, und daher der obere das Vorzeichen

$-$. Deswegen werden in den Fällen, in denen $mn = 8i + 7$ ist, in der für die Teiler gefundenen Formel die zwei letzten Terme sein:

$$\begin{array}{ll} -\,(8i + 3) & -\,(8i+5) \\ +\,(8i+11) & +\,(8i+9). \end{array}$$